ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Май 2020 **Выпуск 104. С. 69-74**

З. Н. Мурзабеков
Казахский Национальный университет
им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
murzabekov-zein@mail.ru

Г. А. Мирзахмедова
Казахский Национальный университет
им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
gulbanu.myrzahmedova@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Для трехсекторного экономического объекта управления ставится задача оптимального управления на конечном интервале времени. Экономическая система путем преобразований сведена к задаче оптимального управления для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления. Найдено нелинейное синтезирующее управление, основанное на принципе обратной связи с учетом ограничений на управление, которое зависит от состояния системы и текущего момента времени. Полученные результаты для нелинейной системы используются при конструировании управляющих параметров для математической модели трехсекторного экономического объекта управления. Определены оптимальное распределение трудовых и инвестиционных ресурсов, которые удовлетворяют балансовым соотношениям. Библиография: 3 назв. Иллюстрации: 2 рис.

В [**1, 2**] рассмотрены задачи оптимального управления с применением множителей Лагранжа для технических систем и линеаризованной системы экономического кластера. В настоящей работе рассматривается экономическая система, которая путем преобразований сведена к задаче оптимального управления для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления.

Производится преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния. Использование нелинейного квадратичного функционала качества позволяет при синтезе управления осуществить построение матричного уравнения Риккати с параметрами, независящими от состояния объекта управления. Этот подход составляет основу синтеза оптимальных нелинейных систем управления. Предлагается использовать комбинированный метод, основанный на построении нелинейной обратной связи, который позволяет представить искомое управление в виде синтезирующего управления, зависящего от состояния нелинейной системы и текущего момента времени. Кроме того, этот метод дает возможность учесть имеющиеся ограничения на значения управлений.

Полученные результаты для нелинейных систем используются при конструировании управляющих параметров для трехсекторного экономического объекта управления на конечном отрезке времени. Следует отметить, что в рассматриваемой задаче изменяются доли трудовых и инвестиционных ресурсов для всех трех секторов экономики.

1. Трехсекторная экономическая модель объекта управления

Рассмотрим задачу оптимального управления для экономической модели объекта управления, состоящей из трех секторов: $i = 0$ (материальный), $i = 1$ (фондосоздающий), $i = 2$ (потребительский).

Рассматриваемая математическая модель состоит из [**3**]

(a) трех дифференциальных уравнений, описывающих динамику фондовооруженностей

$$\dot{k}_i = -\lambda_i k_i + (s_i/\theta_i)x_1, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1.1}$$

(b) трех функций удельного выпуска типа Кобба — Дугласа

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1.2}$$

(c) трех балансовых соотношений

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 \geqslant 0, \quad s_1 \geqslant 0, \quad s_2 \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 \geqslant 0, \quad \theta_1 \geqslant 0, \quad \theta_2 \geqslant 0, \tag{1.4}$$

$$(1 - \beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_0 \geqslant 0, \quad \beta_1 \geqslant 0, \quad \beta_2 \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Здесь состояние экономической системы (фондовооруженность) описывается вектором (k_0, k_1, k_2), $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ — вектор управлений, (s_0, s_1, s_2) — доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов, $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ — доли секторов в распределении трудовых ресурсов), x_i — удельный выпуск (количество выпускаемой продукции в i-м секторе в расчете на одного работающего), β_i — прямые материальные затраты при выпуске продукции в i-м секторе, $i = 0, 1, 2$. Начальное состояние системы равно k_0^0, k_1^0, k_2^0, где $k_i^0 = k_i(0)$ — фондовооруженность i-го сектора, $i = 0, 1, 2$, при $t = 0$. Рассматривается задача перевода нелинейной системы из начального состояния в желаемое состояние за отрезок времени $[0, T]$. В качестве желаемого конечного состояния (k_0^s, k_1^s, k_2^s) используется состояние равновесия системы, которое определено в [**3**] в следующем виде:

$$k_1^s = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s = \frac{s_0 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_0 \theta_0}, \quad k_2^s = \frac{s_2 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_2 \theta_2}. \tag{1.6}$$

Значения k_i^s, $i = 0, 1, 2$, в состоянии равновесия (1.6) зависят от управлений $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$, для которых в [**3**] получены стационарные значения $(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)$.

2. Постановка задачи с ограниченным управлением

Математическую модель объекта управления (1.1), запишем в виде системы дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y)u(t) + B(D(y) - D(k^s))v^s, \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T], \tag{2.1}$$

используя следующие обозначения:

$$y_1 = k_1 - k_1^s, \quad y_2 = k_2 - k_2^s, \quad y_3 = k_0 - k_0^s,$$

$$u_1 = s_1 - v_1^s, \quad u_2 = \frac{s_2\theta_1}{\theta_2} - v_2^s, \quad u_3 = \frac{s_0\theta_1}{\theta_0} - v_3^s, \quad v_1^s = s_1^s, \quad \frac{s_2^s\theta_1^s}{\theta_2^s} = v_2^s, \quad \frac{s_0^s\theta_1^s}{\theta_0^s} = v_3^s,$$

$$f_1(y_1) = (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1}, \quad f_2(y_2) = (y_2 + k_2^s)^{\alpha_2}, \quad f_3(y_3) = (y_3 + k_0^s)^{\alpha_0},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

$$D(y)=\begin{pmatrix}(y_1+k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & (y_1+k_1^s)^{\alpha_1} & 0\\ 0 & 0 & (y_1+k_1^s)^{\alpha_1}\end{pmatrix},\quad D(k^s)=\begin{pmatrix}(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} & 0\\ 0 & 0 & (k_1^s)^{\alpha_1}\end{pmatrix},$$

Постоянные значения k^s и v^s определяются из стационарного положения (1.6), для которых выполняется алгебраическое уравнение

$$Ak^s+BD(k^s)v^s=0, \tag{2.2}$$

где $y=(y_1,y_2,y_3)^*$ — вектор состояния объекта, $u=(u_1,u_2,u_3)^*$ — вектор управления.

Используя дифференциальное уравнение (2.1) и балансовые соотношения (1.3)–(1.5), запишем объект управления в виде

$$\dot y(t)=Ay(t)+BD(y)v(t),\quad y(t_0)=y_0,\quad t\in[t_0,T], \tag{2.3}$$

где

$$v(t)\in V(t)=\{v|\gamma_1(t)\leqslant v(t)-(E-D^{-1}(y)D(k^s))v^s\leqslant\gamma_2(t),t\in[t_0,T],\gamma_1,\gamma_2\in C[t_0,T]\},$$

$$u(t)=v(t)-(E-D^{-1}(y)D(k^s))v^s,$$

$$g(u,y,s,\theta)=0.$$

Будем предполагать, что система (2.3) управляема. Матрицы A и B удовлетворяют условию управляемости, т.е. выполняется условие $\operatorname{Rank}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]=n$.

Пусть задан функционал, который зависит от управления и состояния объекта:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}[y^*(t)Q(y)y(t)+v^*(t)Rv(t)]dt+\frac{1}{2}y^*(T)Fy(T), \tag{2.4}$$

где $Q(y)=KBD(y)R^{-1}D^*(y)B^*K-KBD(k^s)R^{-1}D^*(k^s)B^*K+Q_1$ — положительно полуопределенная матрица, а $R,D(y),F$ — положительно определенные матрицы.

Ставится задача. Требуется найти синтезирующее управление $v(y,t)$, которое переводит систему (2.1) из заданного начального состояния $y(t_0)=y_0$ в желаемое состояние равновесия $y(T)=0$ за отрезок времени $[t_0,T]$, минимизируя при этом функционал (2.4).

3. Решение задачи с ограниченным управлением

Для решения поставленной задачи прибавим к выражению для функционала (2.4) систему дифференциальных уравнений (2.3) с множителем $\lambda=Ky+q(t)$, а также следующее выражение:

$$\lambda_1^*(t)[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(t)[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(t)[y(t)-W(t,T)q(t)], \tag{3.1}$$

где $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$. В результате получим функционал

$$L(y,v)=\int\limits_{t_0}^{T}\{\frac{1}{2}y^*(t)Q(y)y(t)+\frac{1}{2}v^*(t)Rv(t)+(Ky+q(t))^*(Ay+BD(y)v(t)-\dot y)$$

$$+\lambda_1^*(t)[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(t)[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(t)[y(t)-W(t,T)q(t)]\}dt+\frac{1}{2}y^*(T)Fy(T), \tag{3.2}$$

где $q(t)$ — вектор размерности $(n\times 1)$, K — симметрическая положительно определенная постоянная матрица размеров $(n\times n)$.

Для рассматриваемой задачи принцип освобождения от связей состоит в следующем: исходная задача оптимального управления с ограничениями сводится к другой задаче без ограничений. При этом новая задача формулируется так, чтобы ее решение являлось бы решением первоначальной задачи [**1, 2**]. Введем функции

$$V(y,t) = \frac{1}{2}y^*Ky + y^*q(t), \tag{3.3}$$

$$M(y,v,t) = \frac{1}{2}y^*Q(y)y + \frac{1}{2}v^*Rv + (Ky+q(t))^*(Ay(t)+BD(y)v(t)) + y^*\dot{q}(t)$$
$$+ \lambda_1^*(t)[\gamma_1 - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t)-\gamma_2] + \lambda_3^*(t)[y(t) - W(t,T)q(t)]. \tag{3.4}$$

Тогда справедливо следующее представление функционала (3.2):

$$L(y,u) = V(y_0,t_0) + \int\limits_{t_0}^{T} M(y,u,t)dt - V(y(T),T) + \frac{1}{2}y^*(T)Fy(T). \tag{3.5}$$

Искомое управление определяется из соотношения

$$R(u + (E - D^{-1}(y)D_s)v_s) = -D^*B^*(Ky+q(t)) - (\lambda_2 - \lambda_1), \tag{3.6}$$

где матрицы $K, W(t,T)$ и вектор $q(t)$ удовлетворяют на отрезке $t \in [t_0,T]$ дифференциальным уравнениям:

$$KA + A^*K - KBD(k^s)R^{-1}D^*(k^s)B^*K + Q_1 = 0, \tag{3.7}$$

$$\dot{W} = WA_1^*(y,t) + A_1(y,t)W - B_1(y), \quad W(T,T) = (F-K)^{-1}, \quad F \gg K, \tag{3.8}$$

$$\dot{q} = -A_1^*(y,t)q + W^{-1}(t,T)BD\varphi(y,t), \quad q(T) = (F-K)y(T). \tag{3.9}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered} A_1(y,t) = A - B_1(y)K(t), \quad B_1(y) = BD(y)R^{-1}D^*(y)B^*, \\ \varphi(y,t) = R^{-1}[\lambda_1(y,t) - \lambda_2(y,t)], \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} \lambda_1(y,t) = R\max\{0;\gamma_1 - \omega(y,t)\} \geqslant 0, \quad \lambda_2(y,t) = R\max\{0;\omega(y,t)-\gamma_2\} \geqslant 0, \\ \omega(y,t) = -(E - D^{-1}(y)D_s)v_s - R^{-1}D^*(y)B^*(Ky+q(t)), \quad D_s = D(k^s). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Пусть существуют решения уравнений (3.7), (3.8). Тогда дифференциальные уравнения, определяющие закон движения системы, представим в виде

$$\dot{y} = A_1(y,t)y(t) - BD(y)R^{-1}D^*(y)B^*q(t) + BD(y)\varphi(y,t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{3.12}$$

Отметим, что начальное условие для дифференциального уравнения (3.9) определяется из соотношения

$$y(t) = W(t,T)q(t), \quad t \in [t_0,T]. \tag{3.13}$$

Результаты, установленные для задачи оптимального управления (2.1)–(2.4), сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть $Q(y)$ — положительно полуопределенная матрица, R, F, $D(y)$ — положительно определенные матрицы на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, матрица $W_0 = W(t_0,T)$ положительно определена. Предположим, что система* (2.3) *вполне управляема в момент времени t_0. Тогда для оптимальности пары $(y(t),u(t))$ в задаче* (2.3), (2.4) *достаточно выполнения следующих условий*:

1) $y(t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{y} = A_1(y,t)y(t) - B_1(y)q(t) + BD(y)\varphi(y,t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.14}$$

2) *управление определяется следующим образом*:

$$u(y,t) = -(E - D^{-1}(y)D_s)v_s) - R^{-1}D^*(y)B^*(Ky+q(t)) + \varphi(y,t). \tag{3.15}$$

Матрицы K и $W(t,T)$ являются решениями уравнений (3.7) и (3.8), функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.9), вектор-функция $\varphi(y(t),t)$ определяется по формуле (3.10).

4. Алгоритм решения задачи

Опишем удобный для реализации на компьютере алгоритм решения задачи оптимального управления (2.1)–(2.4).

1. Решить систему алгебраических и дифференциальных уравнений (3.7) и (3.8) для определения матриц K и $W(t,T)$ на отрезке $[t_0,T]$.

2. Задать условия $y(t_0)=y_0$ и вычислить $q(t_0)=W^{-1}(t_0,T)y(t_0)$.

3. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (3.12), (3.9) на отрезке $[t_0,T]$ при начальных условиях $y(t_0)=y_0, \quad q(t_0)=W^{-1}(t_0,T)y(t_0)$. В процессе интегрирования системы (3.12) и (3.9) на печать необходимо выдать график оптимальной траектории $y(t)$ и оптимального управления $u(t)$.

4. Пусть найдено состояние системы $y(t)$ и оптимальное управление $u(t)$. Тогда

$$u(t)=v(t)-(E-D^{-1}(y)D(k^s))v^s,$$

$$f_1(y_1)=(y_1+k_1^s)^{\alpha_1}, \quad f_2(y_2)=(y_2+k_2^s)^{\alpha_2}, \quad f_3(y_3)=(y_3+k_0^s)^{\alpha_0},$$

$$\xi=\frac{\beta_1A_1f_1(y_1)+\beta_2A_2f_2(y_2)(1-u_1-v_1^s)/(u_2+v_2^s)}{(1-\beta_0)A_0f_3(y_3)(1-u_1-v_1^s)/(u_3+v_3^s)+\beta_2A_2f_2(y_2)(1-u_1-v_1^s)/(u_2+v_2^s)} \tag{4.1}$$

обеспечивают выполнение условия (1.5),

$$s_1=u_1+v_1^s, \quad s_2=(1-\xi)(1-u_1-v_1^s), \quad s_0=\xi(1-u_1-v_1^s) \tag{4.2}$$

обеспечивают выполнение условия (1.3),

$$\theta_1=\frac{1}{1+s_0/(u_3+v_3^s)+s_2/(u_2+v_2^s)}, \quad \theta_2=\frac{(1-\xi)(1-s_1)\theta_1}{(u_2+v_2^s)}, \quad \theta_0=\frac{\xi(1-s_1)\theta_1}{(u_3+v_3^s)} \tag{4.3}$$

обеспечивают выполнение условия (1.4).

5. Численные расчеты для определения оптимального распределения трудовых и инвестиционных ресурсов

Были проведены численные расчеты на компьютере при следующих значениях параметров:

i	α_i	β_i	λ_i	A_i	s_i^s	θ_i^s	k_i^s
0	0.46	0.39	0.05	6.19	0.2763	0.3944	966.4430
1	0.68	0.29	0.05	1.35	0.4476	0.2562	2410.1455
2	0.49	0.52	0.05	2.71	0.2761	0.3494	1090.1238

Решается задача оптимального управления для значений начального состояния системы $y(t_0)$, которые заданы в следующем виде:

$$y(t_0)=(-700, \quad -300, \quad 300)^*, \tag{5.1}$$

а матрицы R, Q_1, K имеют вид

$$R=\begin{pmatrix}200&0&0\\0&200&0\\0&0&200\end{pmatrix}, \quad Q_1=\begin{pmatrix}16\cdot10^{-4}&0&0\\0&8\cdot10^{-4}&0\\0&0&8\cdot10^{-4}\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}0.1968\cdot10^{-2}&0&0\\0&0.1354\cdot10^{-2}&0\\0&0&0.1354\cdot10^{-2}\end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов состояния системы представлены на рис. 1(a). Из рис. 1(b) видно, что оптимальные управления не выходят за пределы области V, определяемой ограничениями. Для рассматриваемого примера эти ограничения имеют вид

$$-0.45\leqslant u_1\leqslant 0.45, \quad -0.1\leqslant u_2\leqslant 0.8, \quad -0.15\leqslant u_3\leqslant 0.75. \tag{5.2}$$

Здесь компоненты управления $u_1(t)$ и $u_3(t)$ лежат на границе области V на отрезке времени $[0,t_1]$ и $[0,t_2]$ соответственно, затем при $t\in[t_1,T]$, $t\in[t_2,T]$, заходят во внутрь области V.

Переключение управлений происходит в момент времени $t_1 = 1.553$ для компоненты $u_1(t)$ и $t_2 = 4.314$ для $u_3(t)$.

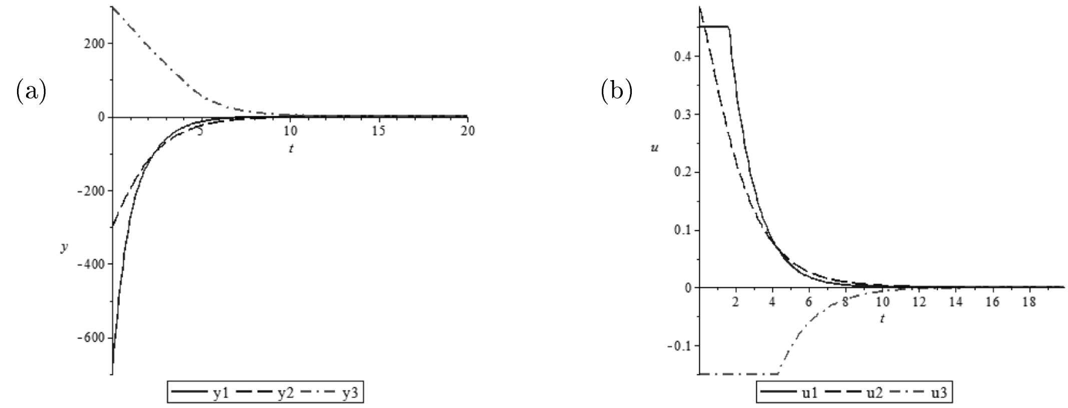

Рис. 1. Графики траекторий $y(t)$ (a) и оптимального управления $u(t)$ (b).

Оптимальные значения состояний системы в конечный момент времени при $T = 20$: $y_1(T) = -0.7292 \cdot 10^{-4}$, $y_2(T) = -0.2731 \cdot 10^{-2}$, $y_3(T) = 0.6313 \cdot 10^{-2}$ и оптимальные значения управлений в конечный момент времени при $T = 20$: $u_1(T) = 6.5097 \cdot 10^{-7}$, $u_2(T) = 0.2432 \cdot 10^{-4}$, $u_3(T) = -0.5620 \cdot 10^{-4}$. С помощью (4.1)–(4.3) определены оптимальное распределение трудовых $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_0(t))$ и инвестиционных ресурсов $(s_1(t), s_2(t), s_0(t))$. На рис. 2 показаны изменения ресурсов, которые удовлетворяют балансовым соотношениям (1.3)–(1.5).

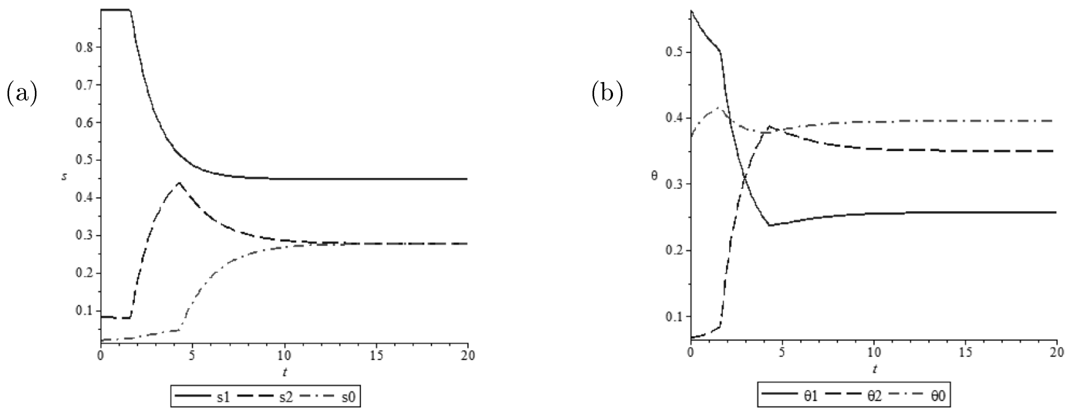

Рис. 2. Графики оптимального распределения инвестиционных (a) и трудовых (b) ресурсов для балансовых соотношений (1.3)–(1.5).

Значения инвестиций $(s_1(t), s_2(t), s_0(t))$ и трудовых ресурсов $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_0(t))$ в конечный момент времени при $T = 20$ стремятся к стационарному состоянию, с оценкой приближения $|s_1(T) - s_1^s| = 0.6510 \cdot 10^{-6}$, $|s_2(T) - s_2^s| = 0.1017 \cdot 10^{-3}$, $|s_0(T) - s_0^s| = 0.1024 \cdot 10^{-3}$, $|\theta_1(T) - \theta_1^s| = 0.1430 \cdot 10^{-4}$, $|\theta_2(T) - \theta_2^s| = 0.2386 \cdot 10^{-4}$, $|\theta_0(T) - \theta_0^s| = 0.3816 \cdot 10^{-4}$.

Литература

1. Z. N. Murzabekov, “The synthesis of the proportional-differential regulators for the systems with fixed ends of trajectories under two-sided constraints on control values”, *Asian J. Control* **18**, No. 2, 494–501 (2016).
2. Ш. А. Айпанов, З. Н. Мурзабеков, “Аналитическое решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления при наличии ограничений на значения управления”, *Изв. РАН, теор. сист. управ.* No. 1, 87–94 (2014).
3. В. А. Колемаев, “Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики”, *Прикл. эконометрика* No. 3, 15–42 (2008).

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2019 г.